Física Experimental IV

Aula 4 - Experiência 1
Circuitos CA e Caos
2013

Prof. Antonio Domingues dos Santos
adsantos@if.usp.br
Ramal: 6886
Mário Schemberg, sala 205

Prof. Leandro Barbosa
lbarbosa@if.usp.br
Ramal: 7157
Ala1, sala 225

http://lababerto.if.usp.br/

Prof. Henrique Barbosa
(**coordenador**)
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
carlin@dfn.if.usp.br
Ramal: 6820
Pelletron

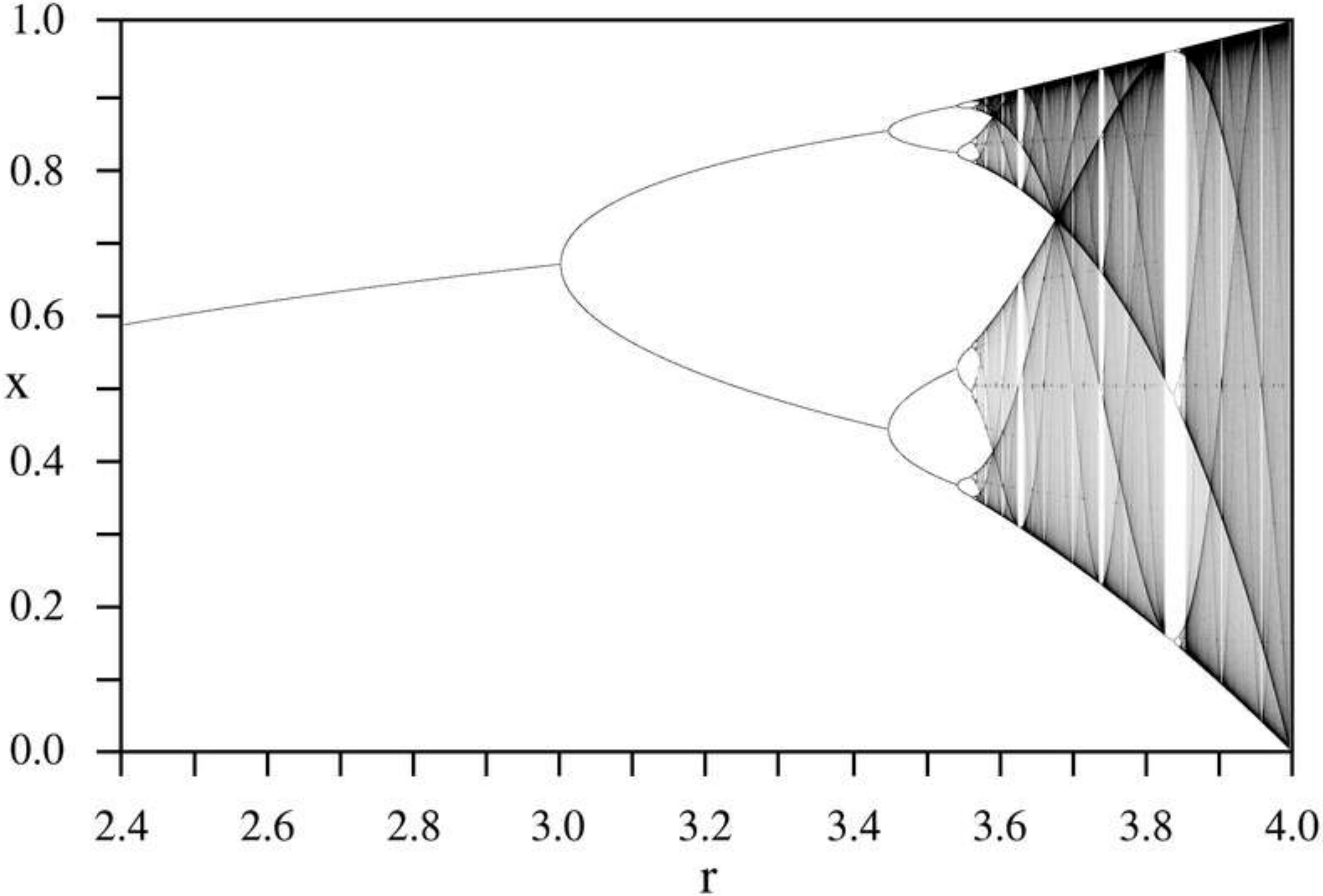
Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br
Ramal: 7016
Basilio, sala 101

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC
  - Circuito integrador e análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

Próximas duas Semanas

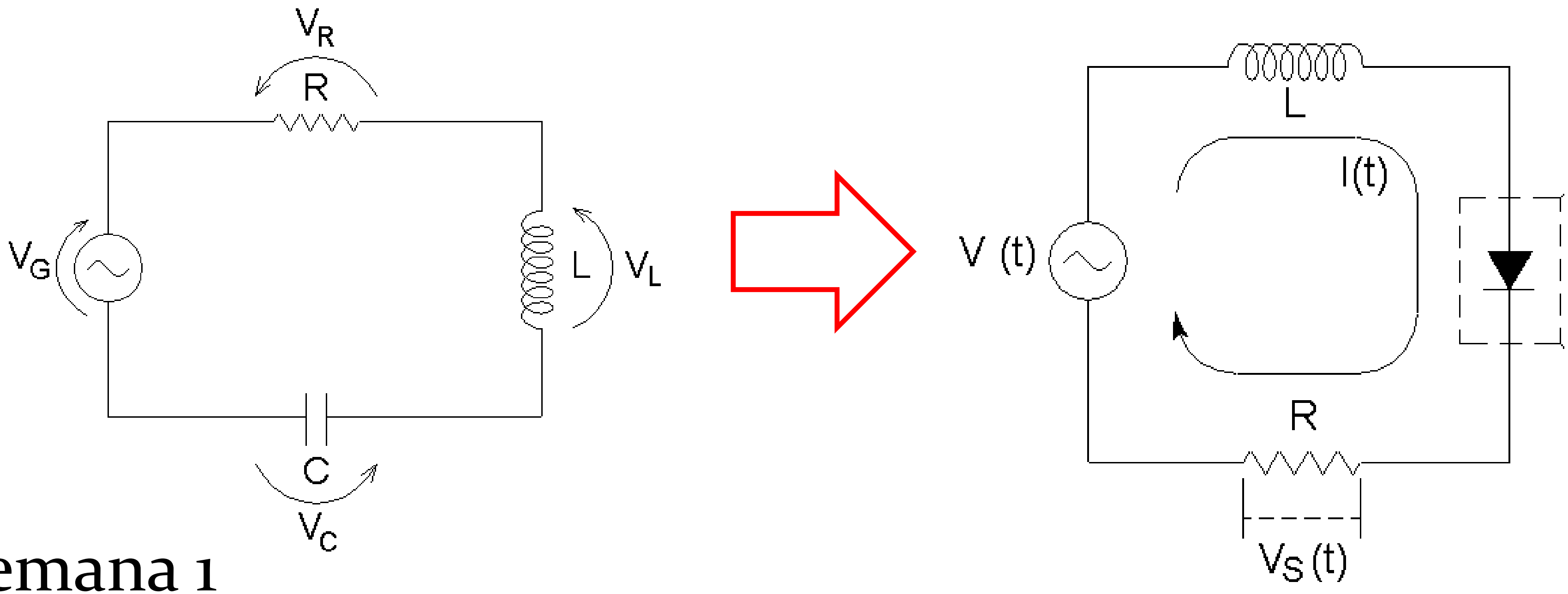


Próximas duas Semanas

- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC muda o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
  - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
    - Diodo → capacitor não linear
  - **A dinâmica muda totalmente → Caos**

Objetivos Para as Próximas Semanas

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



- Semana 1
  - Teoria de caos e experimentos computacionais
- Semana 2
  - Medidas experimentais com RLD

Aula de Hoje

- Introdução a caos e sistemas caóticos
- Estudo de crescimento de populações
  - Mapa logístico

O que é Caos ?

Quais são os limites para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?

Comportamento regular rígido

- Pêndulos (relógio)
- Sistema massa-mola
- Queda livre
- Circuito RLC comum

Sistemas que apresentam Caos

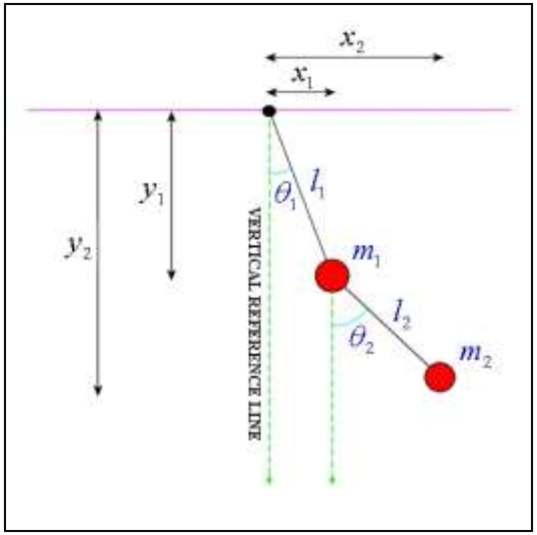
- Clima
- Crescimento populacional
- Pêndulo duplo
- Circuito RLD

Comportamento totalmente aleatório

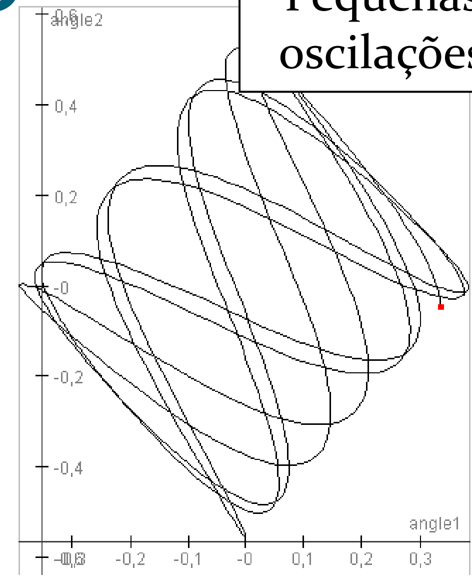
- Jogo de dados
- Decaimento radioativo
- Movimento Browniano

Exemplo: Pêndulo Duplo

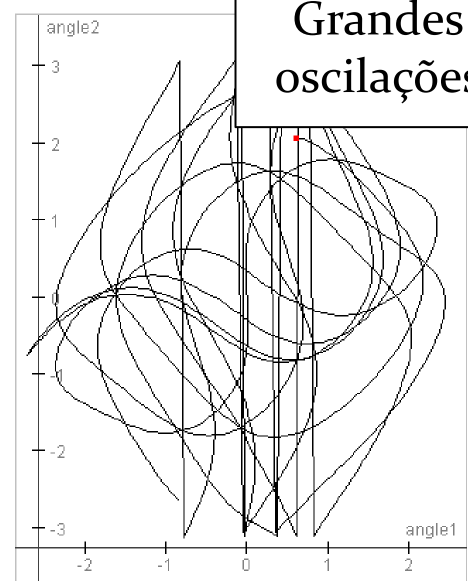
- Um pêndulo amarrado no outro
  - O espaço de fase é composto pelos 2 ângulos e as 2 velocidades



Pequenas oscilações



Grandes oscilações

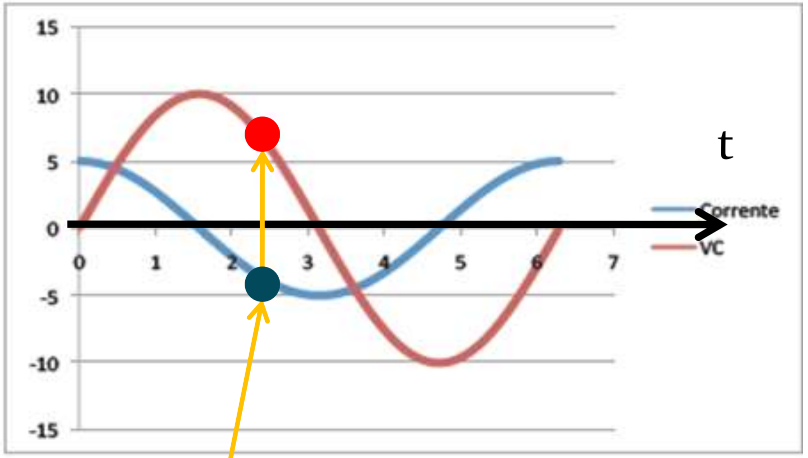


http://physlab.net/dbl_pendulum.html
http://lecturedemo.ph.unimelb.edu.au/Mechanics/Chaos/Mn-1-Chaotic-Double-Pendulum

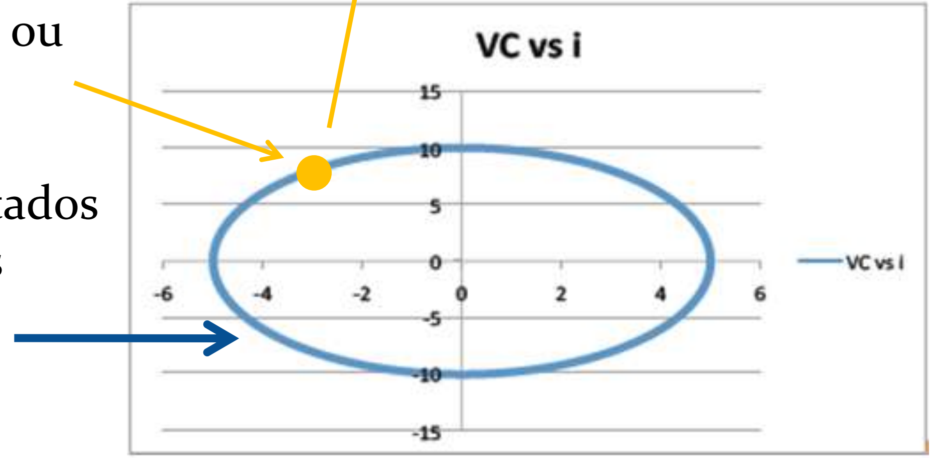
Algumas Definições Necessárias

Sistema dinâmico – é qualquer sistema cuja evolução a partir de uma determinada condição inicial é regida por um conjunto de regras. Essas regras podem se resumir a um conjunto de equações diferenciais, que é o caso para sistemas contínuos.

Espaço de fase – é o espaço no qual todos os possíveis estados de um sistema são representados.
Ex: No pêndulo duplo teria 4 dimensões:
$\theta_1, \theta_2, \theta_1'$ e θ_2'



Estado – é uma possível condição para o sistema, isto é, uma configuração de variáveis que represente uma condição fisicamente possível ou aceitável.



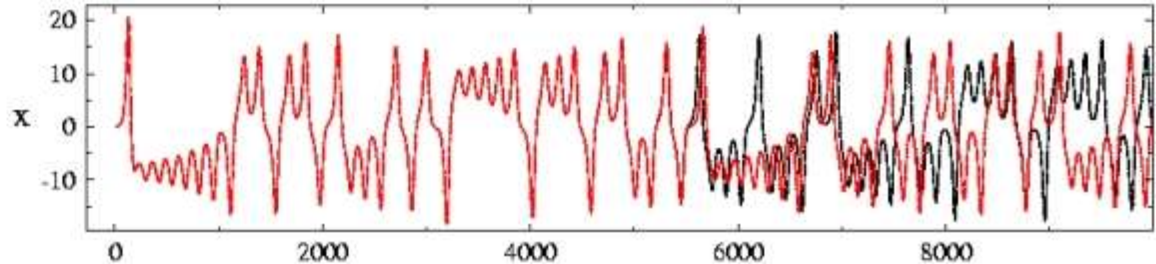
Retrato de fase – é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema dinâmico em questão. Os retratos de fase para sistemas contínuos são trajetórias no espaço de fase.

Algumas Definições Necessárias

- **Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real** depende de um ou mais parâmetros chamados de **parâmetros de controle**.
- Por exemplo: a **freqüência natural de oscilação** é um parâmetro de controle de um oscilador harmônico simples.
- No caso de um circuito **RLC forçado**, tanto a **freqüência** quanto a **amplitude da tensão aplicada** são parâmetros de controle.
- Um sistema dinâmico pode, portanto, ser pensado como função do parâmetro de controle. De fato, pode-se **influir no comportamento dinâmico do sistema alterando-se o valor de um parâmetro de controle**.

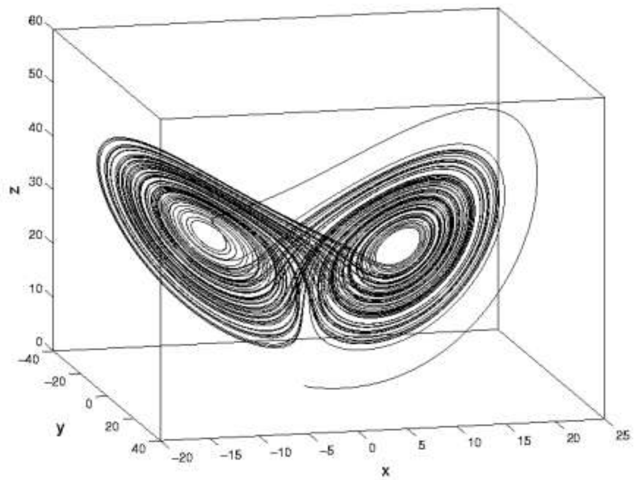
CAOS: Principais características

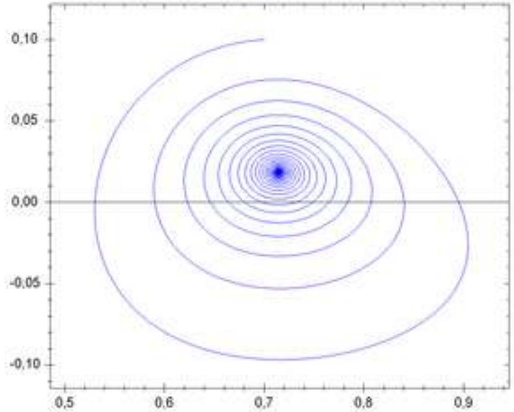
- **Não linearidade**. Se o comportamento de um sistema for linear, esse sistema não pode ser caótico
- **Sensibilidade a condições iniciais**: pequenas alterações nas condições iniciais podem levar a comportamentos radicalmente diferentes do sistema em seu estado final. É o chamado "efeito borboleta". Os sistemas caóticos também apresentam sensibilidade aos parâmetros de controle.
- **Determinismo**: existem regras subjacentes determinísticas (e não probabilísticas) que todo estado futuro do sistema deve obedecer
- **Manutenção da irregularidade no comportamento do sistema**. Há uma ordem oculta que inclui um número grande de configurações periódicas ocultas na infra-estrutura desses sistemas: há uma "ordem na desordem".
- **Previsão de longo prazo impossível:** em decorrência da sensibilidade às condições iniciais, a previsão (mas não o controle) do comportamento de sistemas caóticos de **longo prazo é impossível**, porque as condições iniciais são conhecidas com grau de precisão finito.



CAOS: Como são as trajetórias no espaço de fase?

- **Existem 3 possibilidades para essas trajetórias**:
  - as trajetórias tendem a se concentrar numa determinada região do espaço de fase e não saem mais de lá: esses são chamados de estados assintóticos do sistema ou **atratores**.

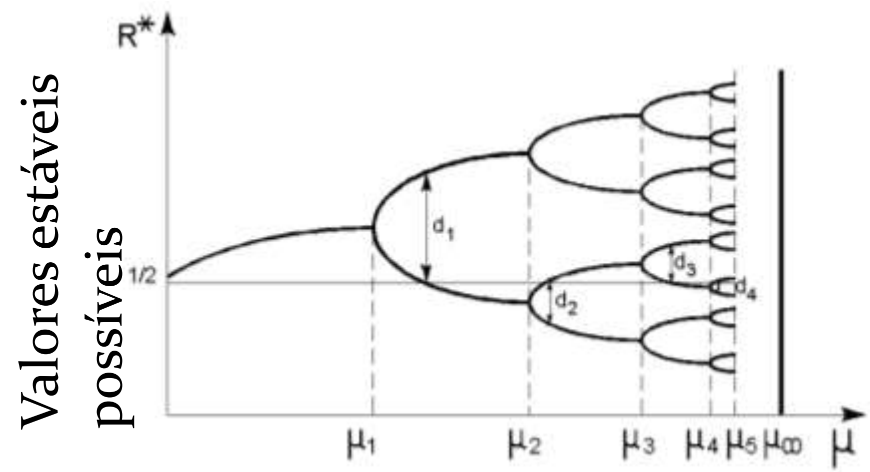




  - as trajetórias tendem a se afastar uma das outras e vão para o infinito
  - as trajetórias ficam "passeando" por todo o espaço de fase

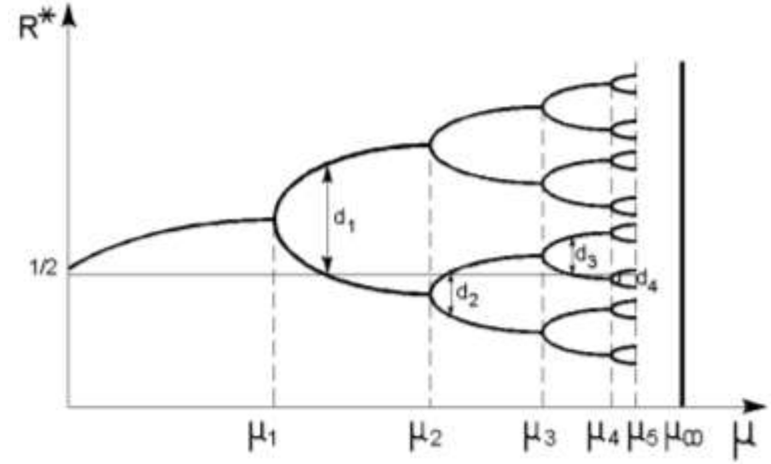
CAOS: Como se chega lá?

- **Bifurcações** – Vamos supor que um sistema dinâmico tenha um parâmetro de controle μ.
  - Variando-se μ podem aparecer novos padrões de comportamento ou seqüências de novos estados estáveis(atratores) para o sistema.
  - Neste caso diz-se que ocorreram **bifurcações** e μ_n é o valor do parâmetro de controle para o qual ocorreu a n-ésima bifurcação.
  - Em outras palavras, variando-se μ pode-se variar tanto a posição quanto as características qualitativas dos pontos de equilíbrio estáveis (atratores) do sistema.



CAOS: Como se chega lá?

- Nesse caso uma solução estável do sistema perde a estabilidade com a variação de um parâmetro de controle e aparece uma nova solução estável com o dobro do período da solução anterior. Então diz que para $\mu=\mu_n$ houve uma bifurcação porque o "período" duplicou. Essas soluções são estados assintóticos do sistema, geralmente chamados de **atratores**.
- Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**) é a duplicação dos atratores



Caos: a constante de Feigenbaum

- A cascata de bifurcações apresentadas pelos sistemas que se encaminham para o caos via **cenário de Feigenbaum** tem certas propriedades de caráter universal:
  - verifica-se que os valores de μ_n onde ocorrem bifurcações obedecem a uma lei de escala:

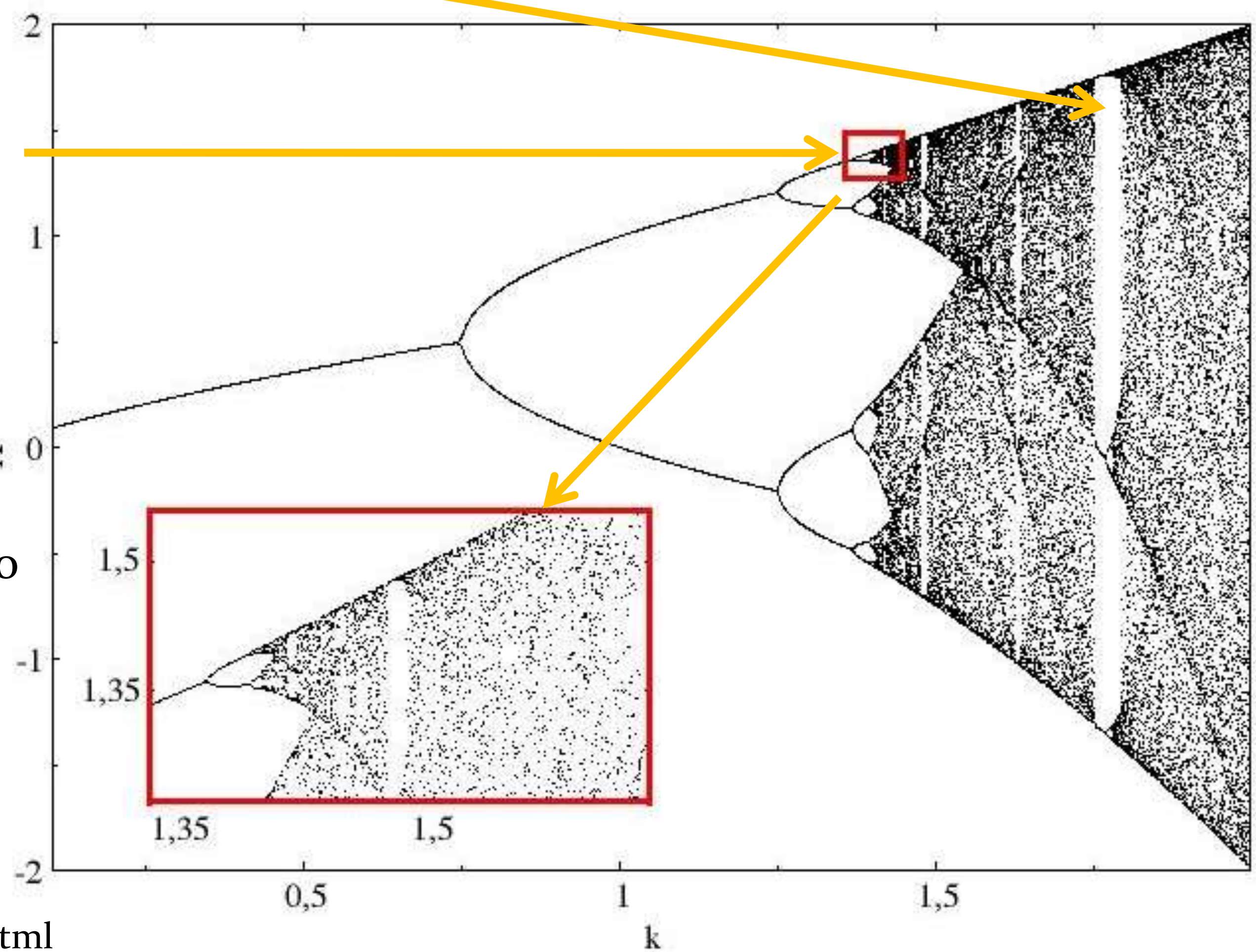
$$\lim_{n\to\infty} = \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta \qquad \delta = 4{,}6692016091029909\ldots$$

- <u>δ é uma constante universal para sistemas que apresentam duplicação de período</u>

Caos e Fractais

- A sucessão de dobramentos do período acaba levando ao domínio caótico, que *parece* (**mas não é**) uma nuvens de pontos dispersos.
- No meio do caos, há janelas indicando uma dinâmica organizada e previsível.

  - Um pequeno pedaço é similar ao diagrama todo ⇒ fractal.
  - … Ou melhor: o domínio caótico aparece como uma nuvens de pontos com dimensão fractal no espaço de parâmetros



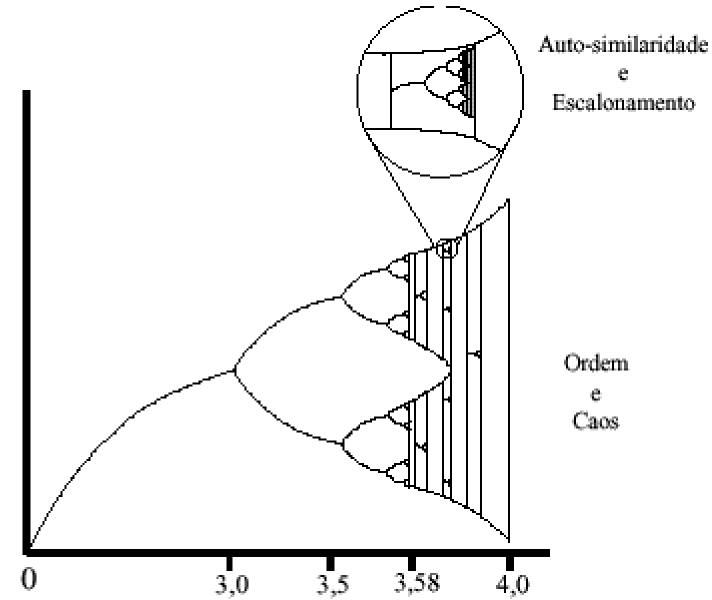
http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Caos e Fractais

Fractal - é a propriedade de se fraturar em padrões auto-similares e escalonados. Fractais possuem:

- **Auto-similaridade** - existem padrões dentro dos padrões que nunca são exatamente os mesmos mas que são sempre similares (galhos de uma árvore que se bifurcam cada vez mais até chegar nas micro-nervuras da folha, mas que têm praticamente o mesmo padrão de bifurcação).

- **Escalonamento** - quando examinamos os padrões de auto-similaridade em escalas cada vez menores, verificamos que eles são repetições de si mesmos (podemos "enxergar" o padrão de nervuras de uma árvore inteira em qualquer folha desta mesma árvore).



Wagner P. Paiva http://www.cyta.com.ar/ta0203/v2n3a2/v2n3a2.htm

Exemplo Simples de CAOS

- Em 1838, Pierre Verhulst publicou sua "equação logística" para descrever o crescimento de populações, ou a taxa de crescimento em função da população atual e do parâmetro ***r***.

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x), \text{ com } x = \frac{\text{número de indivíduos}}{\text{capacidade do ambiente}}$$

- r é o número malthusiano:
  - Se **r < 0** a população sempre morre com o tempo
  - Se **r > 0** a pode sobreviver
- Essa equação pode ser resolvida de maneira exata e a solução só depende de x_o e de r.

$$x(t) = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1)e^{-rt}}, \text{ função sigmoide}$$

Exemplo Simples

- A equação de **Verhulst** possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante t depende somente das condições iniciais e é contínua.
- Era desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial.
- O **Mapa Logístico** é um análogo discreto no tempo da equação logística e foi popularizado por um paper de 1976 de **Robert May.** Físico teórico australiano, ele começou a trabalhar com biologia quando foi para o Instituto de Estudos Avançados de Princeton em 1971.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Só funciona para gerações independentes.
Ex: insetos colocam ovos antes do inverno, que ficam adormecidos em baixas temperaturas, e eclodem com a chegada do calor no ano seguinte...

Exemplo Simples: Mapa Logístico

Crescimento de Populações:

- O mapa logístico descreve o tamanho da populações em função de seu tamanho na geração anterior:

$$x_{n+1} = x_n \cdot r(1 - x_n)$$

  - $\mathbf{x_n}$ são frações da população máxima (capacidade do meio)
  - $\mathbf{x_0}$ é a fração inicial
  - **r** é o potencial biótico e $\mathbf{r(1-x_n)}$ é a taxa de crescimento
- Deve-se ter necessariamente **r>0** e **r<4**
- Como é a evolução temporal da população (tamanho das gerações n=1,2,3...) em função da condição inicial X_0 e do potencial biótico?

Calculando o Mapa Logístico(1)

- Na mão:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

x0=0.500 e r=0.5

x1=.5*.5*(1-.5)=.125

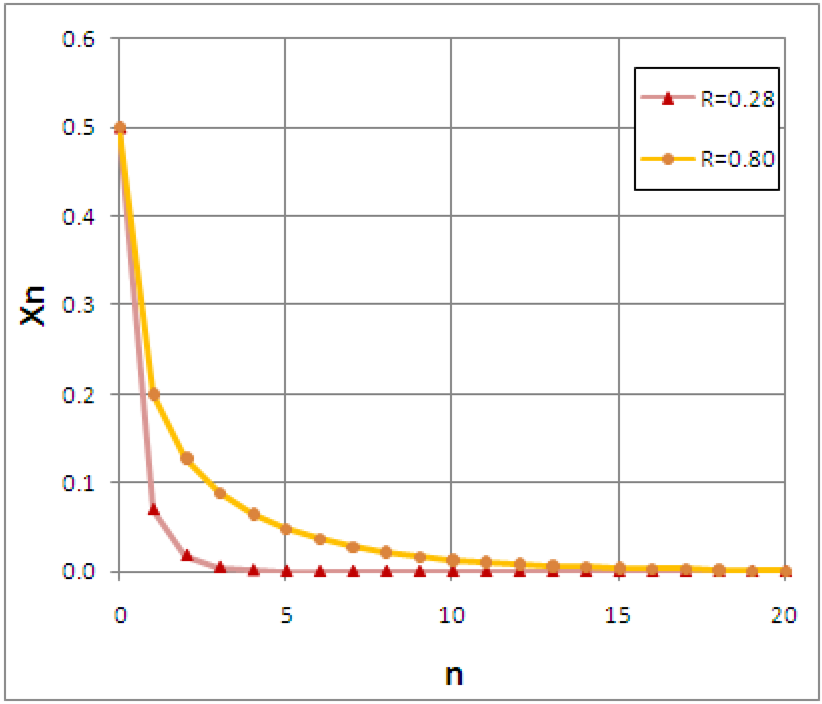
x2=.5*.125*(1-.125)=.055

x3=.5*.055*(1-.055)=.026

x4=.5*.026*(1-.026)=.013

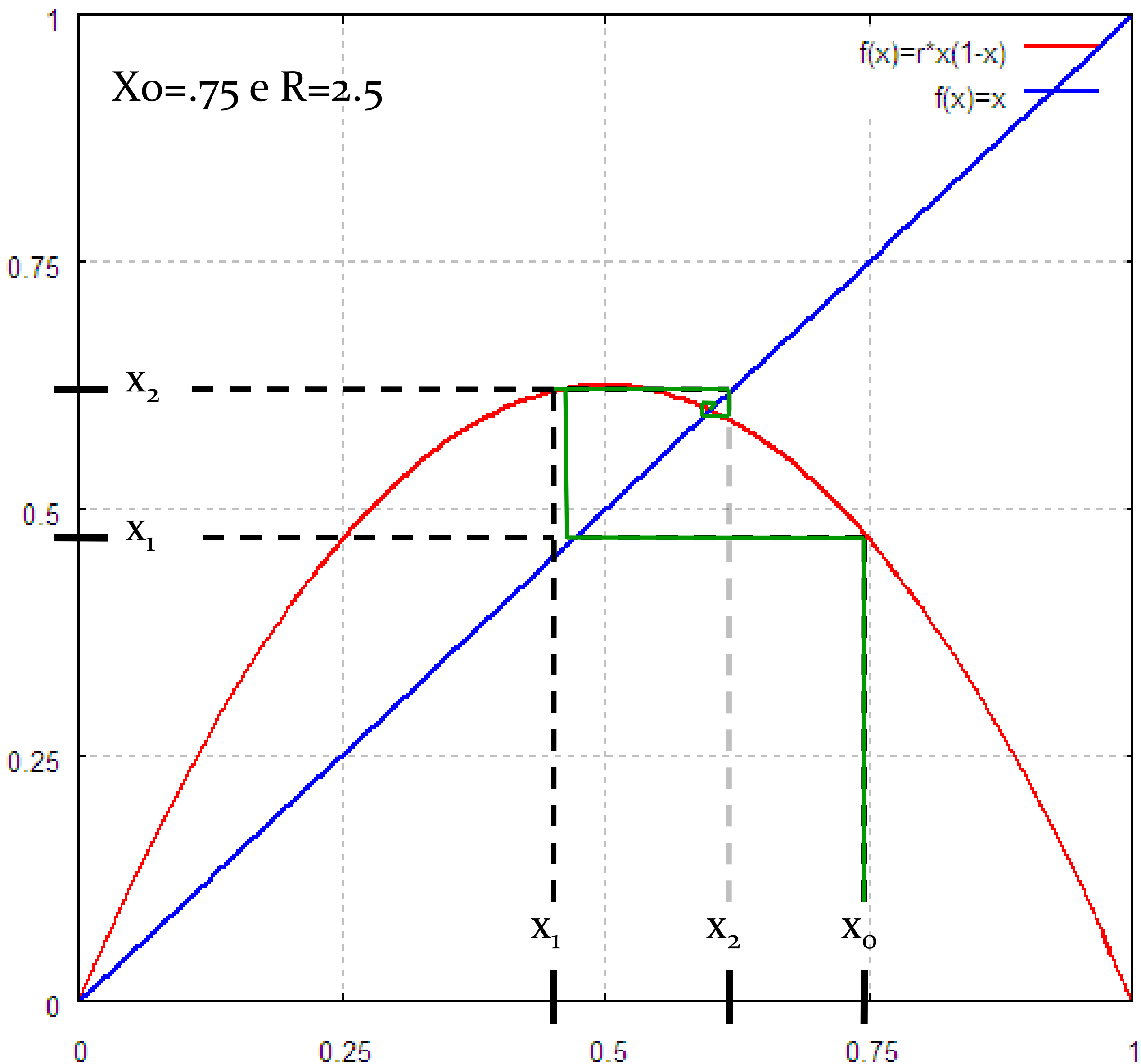
...

x9=0.000



Para estes parâmetros a população não sobrevive

Calculando o Mapa Logístico(2)



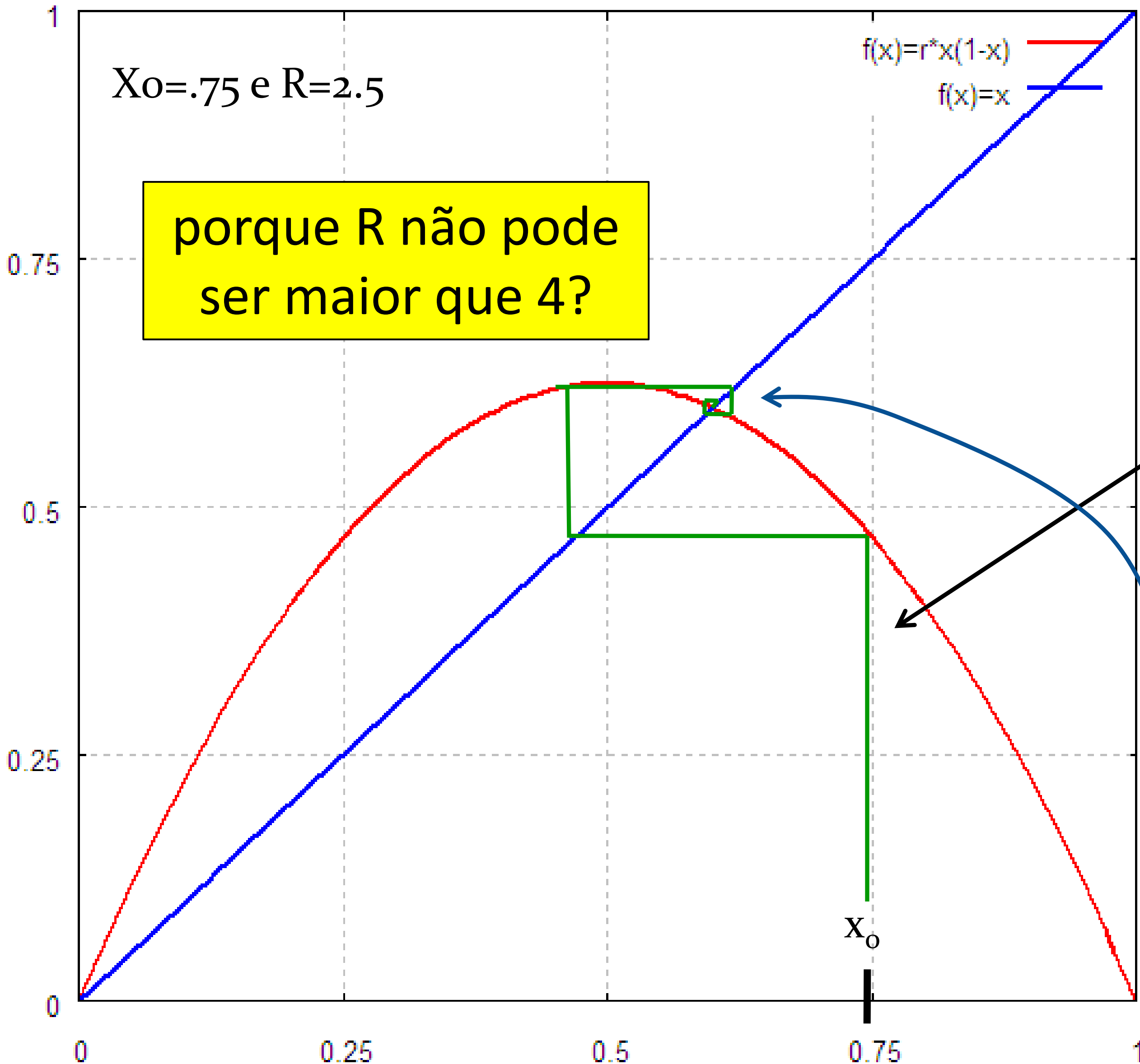
- Meios gráficos:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

1) Calcula-se o valor de $f(x_0)$
2) Rebate-se na reta para ter x_1
3) Calcula-se o valor de $f(x_1)$
4) Rebate-se na reta para ter x_2
5) etc...

A população estabilizou em 0.6

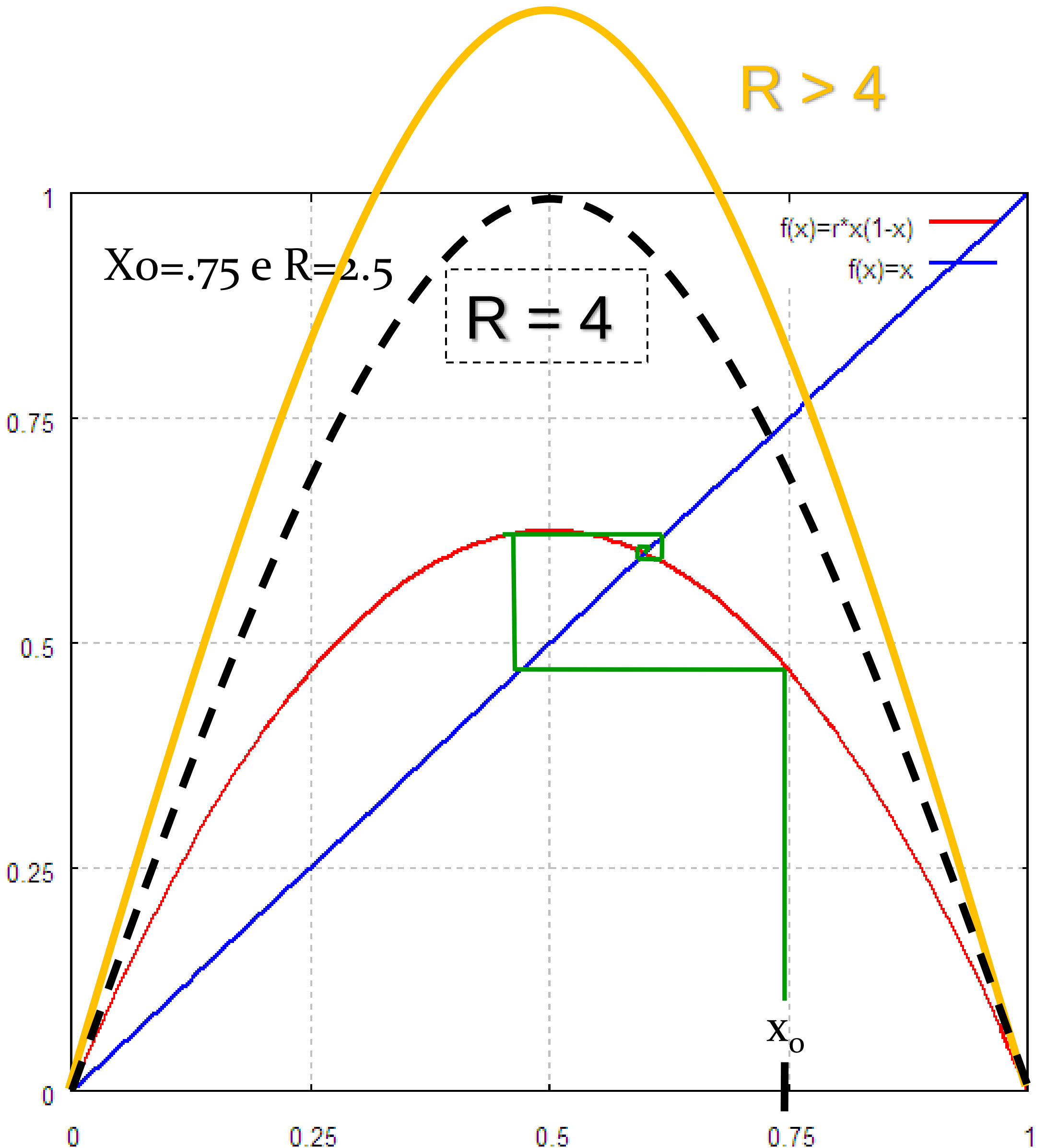
Calculando o Mapa Logístico(2)



IMPORTANTE: O comportamento depende de r.

- Transiente:
  - As várias iterações antes da população estabilizar
- Estacionário
  - As iterações depois do transiente

Mapa Logístico - Detalhes

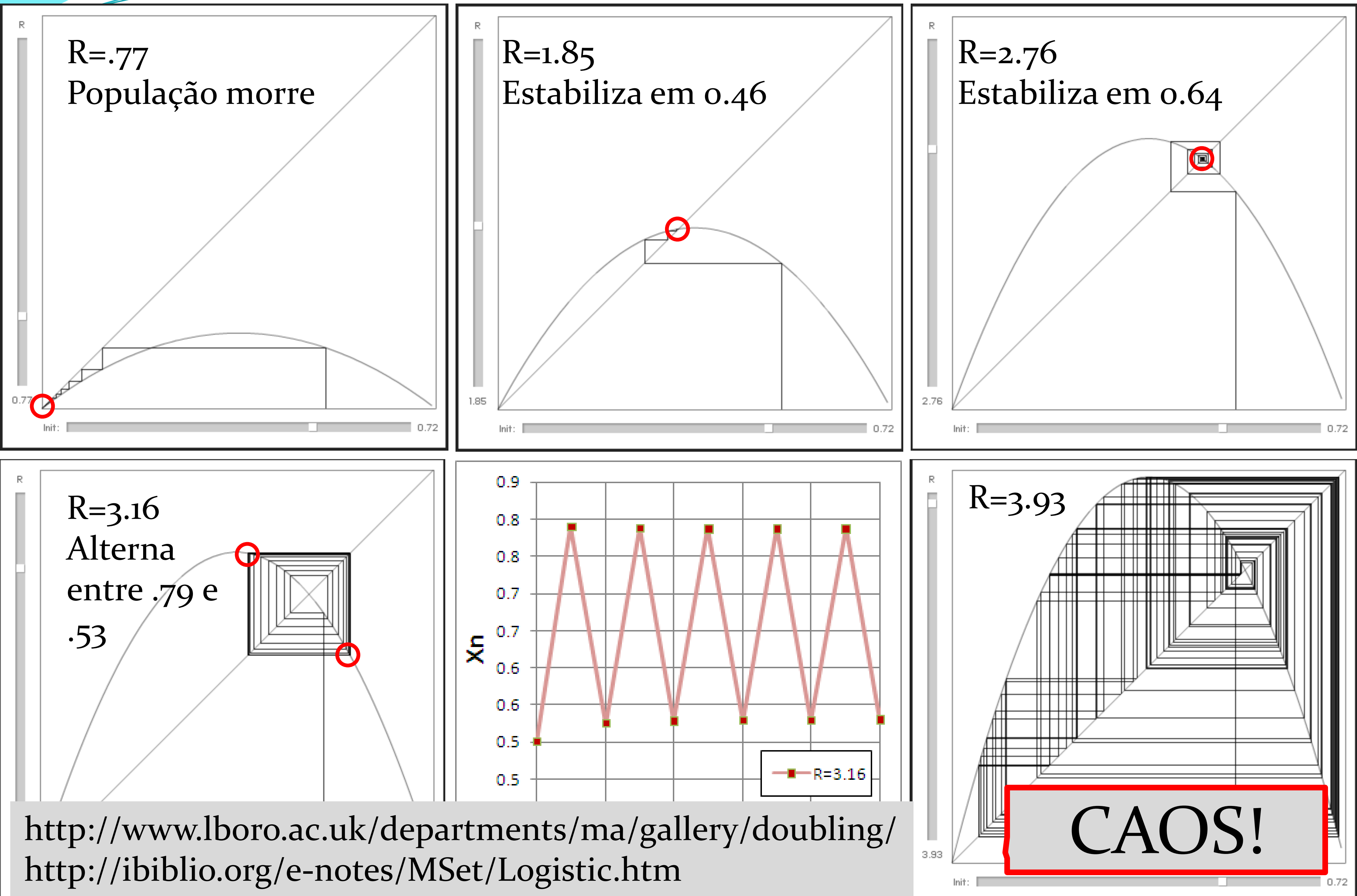


$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Porque 0 < R < 4 ?

- R<0 => x < 0
- R=0 => x = 0
- R > 4 => x > 1
- R=4 => x=0

Applet Mapa Logístico – x_0=0.72



http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/gallery/doubling/
http://ibiblio.org/e-notes/MSet/Logistic.htm

Se divertindo com o Applet

- Varie **r** para um x_0 qualquer e veja que para **r<1** a solução final (atrator) depois de várias iterações é sempre **zero**:
  - variando x_0 o que muda é a rapidez com que a solução se aproxima do atrator

- Agora faça **r=2,5** e veja que **zero** não é mais um atrator, o novo atrator é a intersecção da parábola $f(x)=x\ r(1-x)$ com a reta $f(x)=x$, para qualquer valor de x_0.

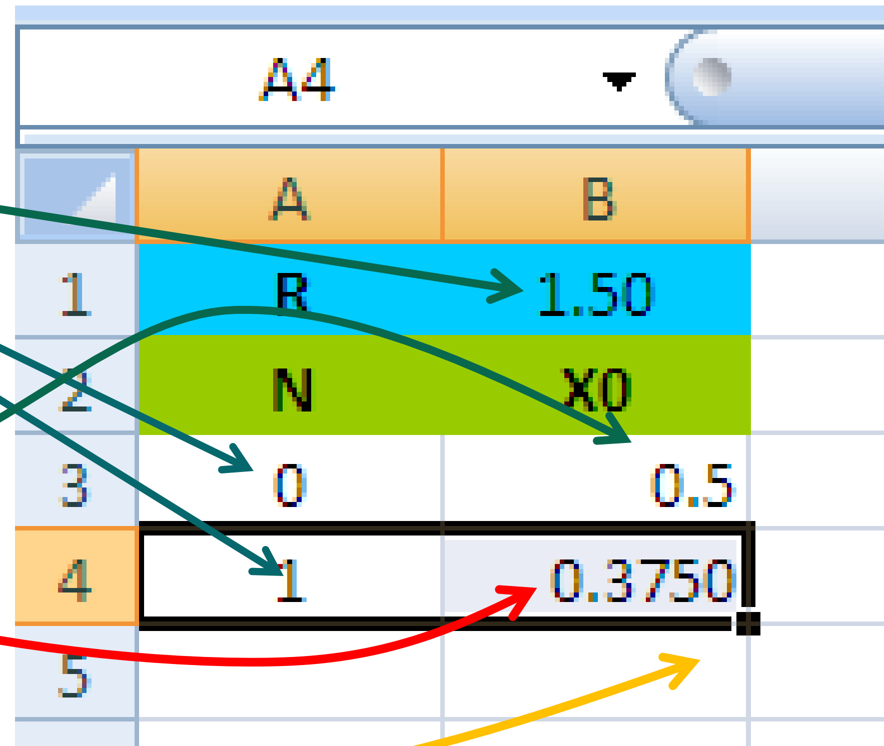
- Agora faça **r=3,2** e veja que agora a interseção da parábola e da reta **não** é mais um atrator. Temos **dois** atratores, dados pela interseção do quadrado com a parábola.

- Aumente **r** ainda mais e veja aparecer o caos!

Calculando o Mapa Logístico(3)

- Ao invés de fazer “na mão” podemos usar o Excel

- Valores Constantes:
  - R na célula B1
  - N nas células A3 e A4
  - x0 na célula B3
- A célula B4 (x1) vale:
  - =B$1*B3*(1-B3)
- Selecionar a linha 4
  - E arrastar com o mouse para repetir a fórmula para as outras linhas.



Calculando o Mapa Logístico(3)

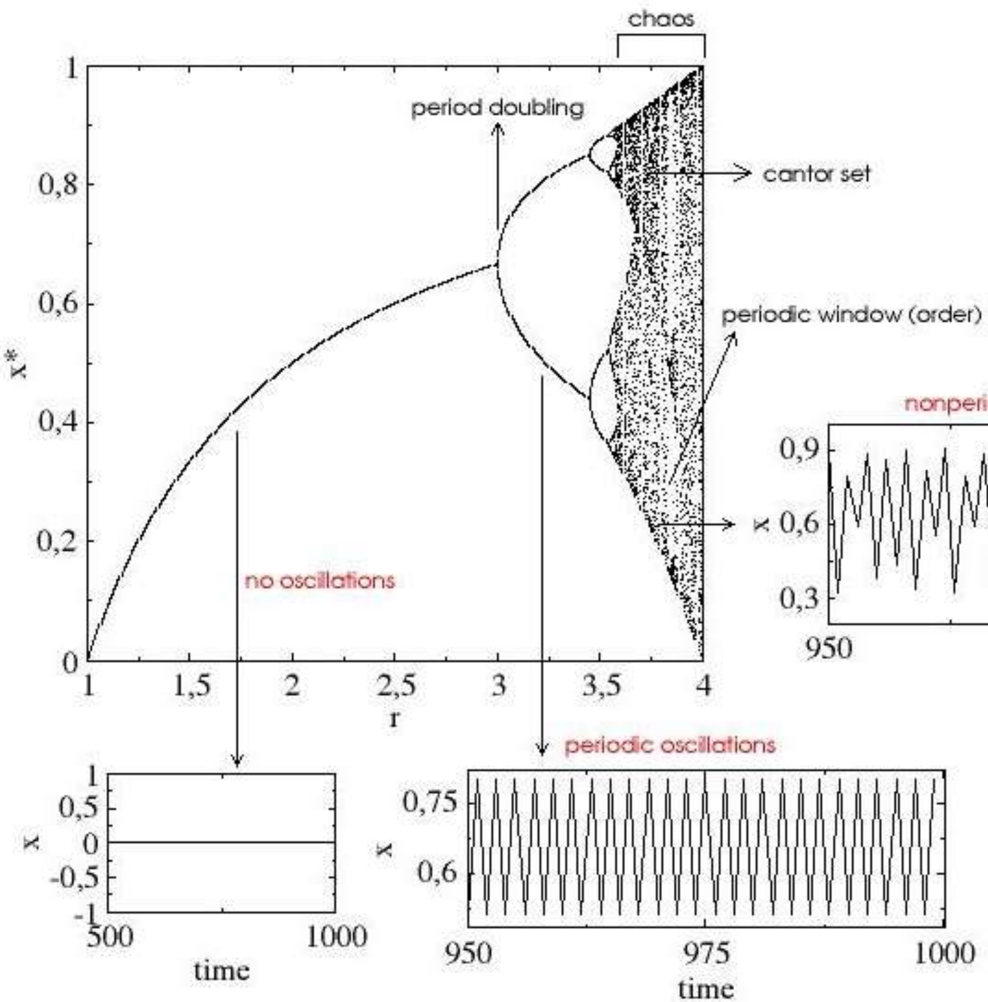
Você pode calcular para vários "R"s de uma vez, ou mesmo definir um intervalo de valores onde serão calculados!

Lembre-se que o número de iterações é importe, para ter certeza do valor é bom ter pelo menos 500 iterações.

C4 =C1+(E1-C1)/100*C3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		min=	0.2	max	4					
2										
3		0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	R	0.20	0.24	0.28	0.31	0.35	0.39	0.43	0.47	0.50
5	N	X0								
6	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
7	1	0.0500	0.0595	0.0690	0.0785	0.0880	0.0975	0.1070	0.1165	0.1260
8	2	0.0095	0.0133	0.0177	0.0227	0.0283	0.0343	0.0409	0.0480	0.0555
9	3	0.0019	0.0031	0.0048	0.0070	0.0097	0.0129	0.0168	0.0213	0.0264
10	4	0.0004	0.0007	0.0013	0.0022	0.0034	0.0050	0.0071	0.0097	0.0130

O Diagrama de Bifurcação



- Para alguns valores de R o sistema tem um atrator
- Para outros valores, tem dois
- ... a cada bifurcação, dobramos o número de atratores
- ... o que por fim nos leva ao caos!

O Diagrama de bifurcação é um gráfico dos atratores em função do parâmetro de controle

Se divertindo com a Planilha

O que é interessante de se observar:

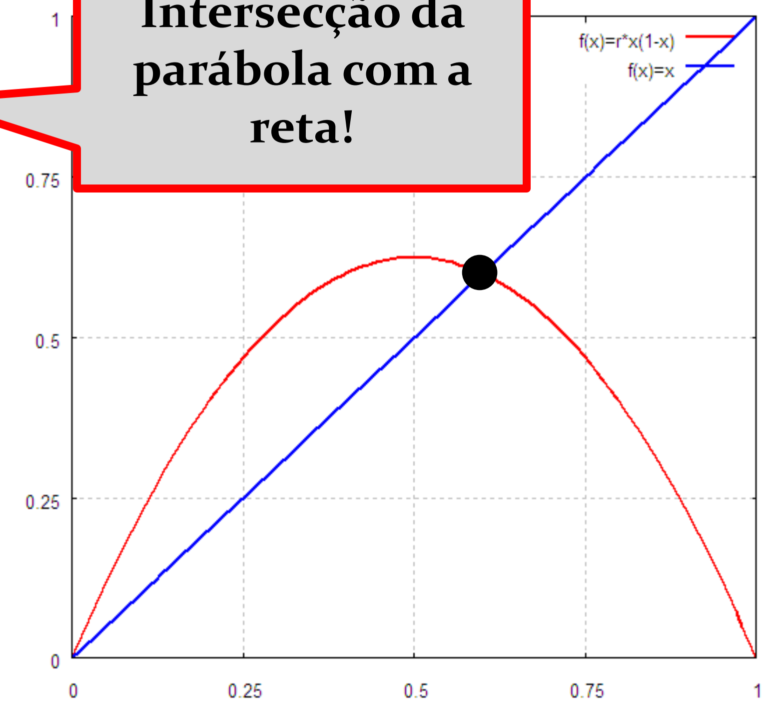
- Faça gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle r.
  - Por exemplo varie r de 0.5 até 4 de 0.25 em 0.25. O que acontece? Deixe x_o fixo em 0.5.
- O número de iterações é importante a solução deve atingir a estabilidade (quando isso é possível) (digamos 500 no mínimo)
- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas contra o parâmetro de controle. Veja o que ocorre.

Prevendo os Atratores

- Há uma maneira de prever quais seriam os atratores?
  - Quando chega no atrator qualquer iteração fornece sempre o mesmo valor. Matematicamente:

$$x_{n+1}=x_n \Rightarrow rx_n(1-x_n)=x_n$$

Intersecção da parábola com a reta!



  - As soluções dessa equação são:

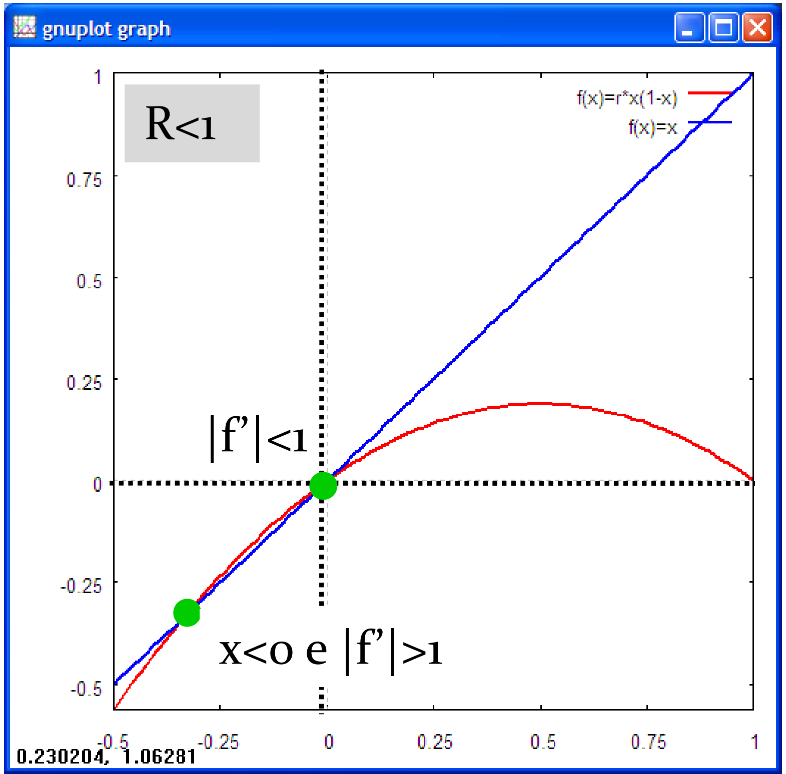
$x_n=0$ e $x_n=(1-1/r)$

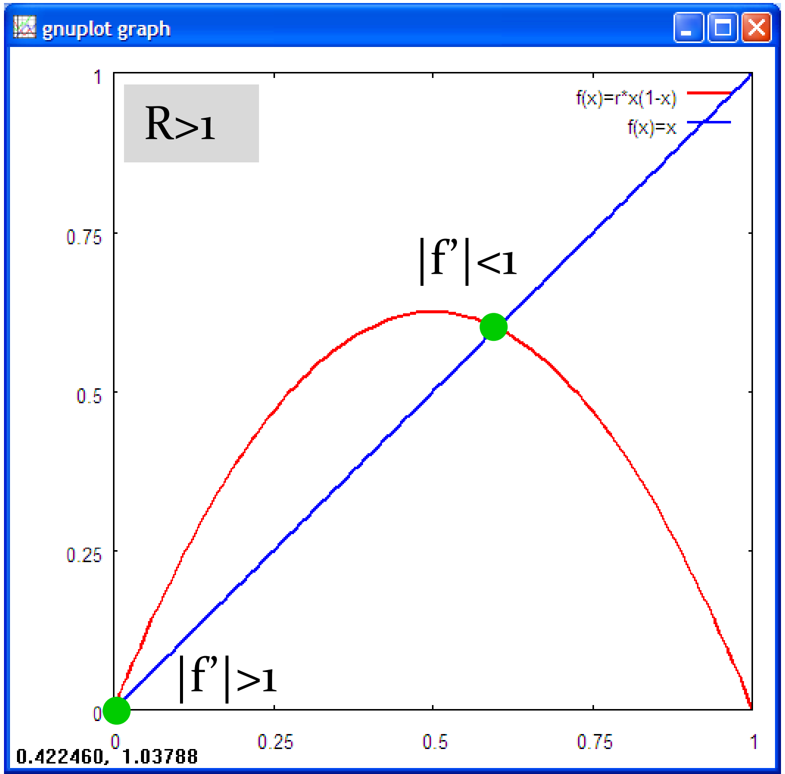
- **Será que ambas as soluções são atratores?**

Prevendo Atratores

- Vimos no Applet que para **r<1, x_n=0** é o atrator e **x_n=(1-1/r)** não é
- Vimos na planilha que para **r>1**, **x_n=(1-1/r)** é o atrator e **x_n=0** não é.
- Onde ocorre essa troca? e qual a condição para ser um atrator?

- Não vamos provar matematicamente, mas a condição para ser um atrator é que **módulo da derivada f'(x_n) seja menor que 1** (ou seja que a parábola não esteja mais inclinada do que a reta)





As Soluções de $x_{n+1}=x_n$

- A derivada é simplesmente:

$$f'(x_n)=r-2rx_n$$

- Caso $x_n \to 0$
  - $f'(0)=r$
  - Para que seja um atrator $|f'| < 1 \Rightarrow -1<r<1$
  - e como $r>0$ então: $0<r<1$
- Caso $x_n \to 1-1/r$
  - $f'(1-1/r)=2-r$
  - Para que seja atrator $|f'|<1 \Rightarrow |2-r|<1 \Rightarrow 1<r<3$

- **VERIFIQUEM isso no applet!**

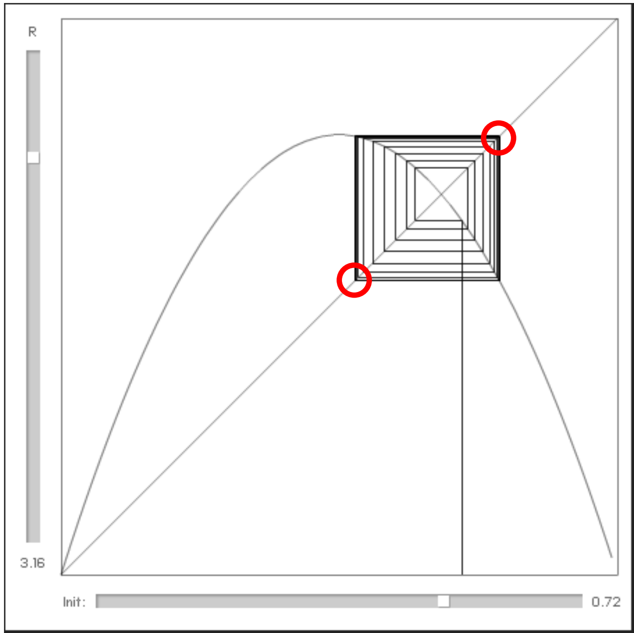
Prevendo 2 Atratores

- Observamos na planilha e no applet que para determinados valores de **r>3**, não tem **1** atrator, mas **2** atratores!
- Como prever isso? Basta usar a condição $x_{n+2}=x_n$, o que significa que a cada duas iterações repete-se um valor

- Vamos calcular:

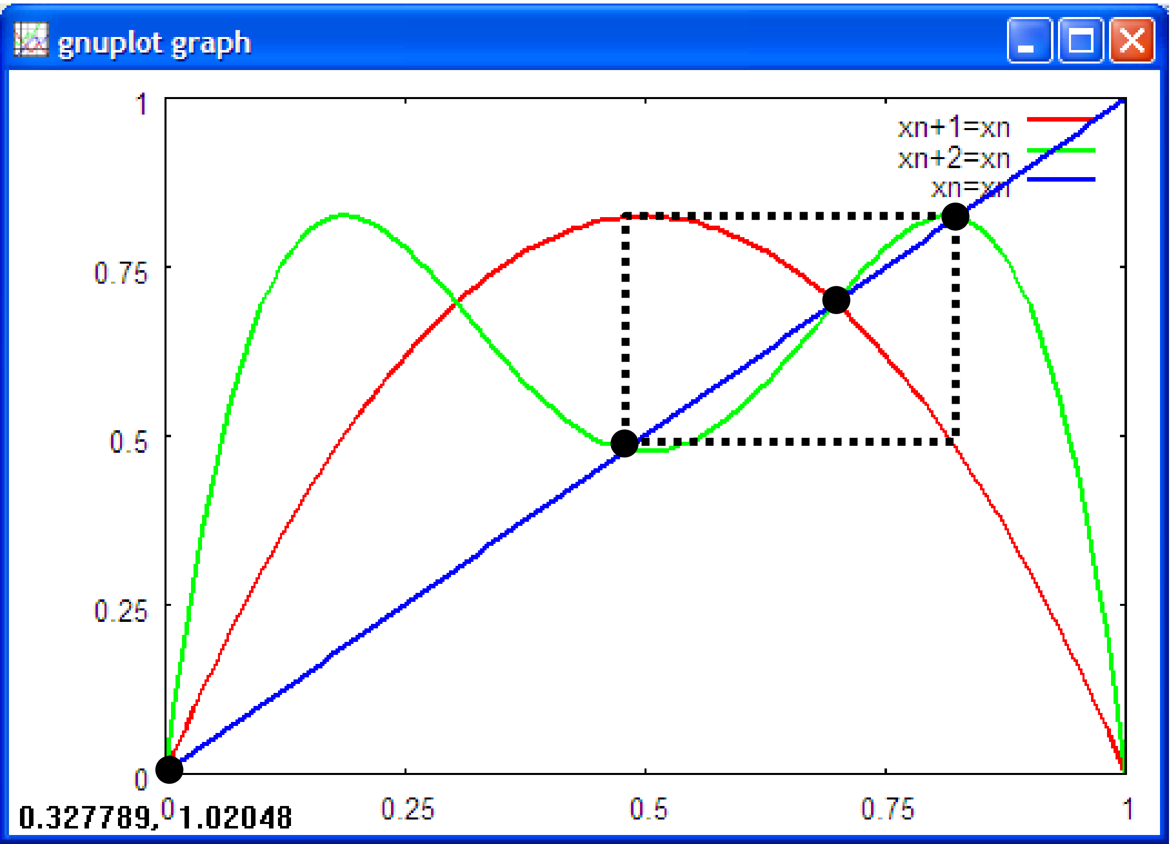
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= rx_{n+1}(1-x_{n+1}) \\ &= r[rx_n(1-x_n)][1-rx_n(1-x_n)] = x_n \end{aligned}$$

  - **Ou seja, agora os atratores estão na intersecção da reta com um polinômio de 4º grau.**



As Soluções de $X_{n+2}=X_n$

- No gráfico vemos um exemplo das soluções. Duas delas coincidem com as anteriores, mas neste caso ambas tem **|f'|>1** e não servem.
- As outras duas soluções são:



$$x_n = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Aplicando a condição para a existência de atratores:

  $|f'(x_n)|<1$,

- chega-se à conclusão que

  $3<r<(1+\sqrt{6})$

- vocês podem verificar isso com o applet.

Tarefas 1 – para síntese

A convergência para os atratores:

- Fazer os gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle. Deixando x_0 fixo em 0.5, faça:
  - Três valores de r para $0<r<1$ (no mesmo gráfico)
  - Três valores de r para $1<r<3$ (idem)
  - Dois valores de r para $3<r<1+\text{raiz}(6)$ (idem)
  - **Atenção: que intervalo de n é interessante mostrar para cada um deste gráficos? Precisa mostrar até n=1000? Queremos ver os regimes transientes e estacionários.**

- Uma planilha para simulação do mapa logístico está no site, junto das notas de aula!
- => Está semana não é obrigatória a presença no lab!!!

Tarefas 2 – para síntese

Sensibilidade a condição inicial:

- Fazer gráficos de x_n como função de n para os regimes **com e sem caos** partindo de 2 condições iniciais muito próximas: $x_0=0.5$, $x_0=0.500001$
  - **Atenção:** Queremos ver a separação das soluções!!

Diagrama de bifurcação:

- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas (os valores lá no final da tabela) em função do parâmetro de controle.
  - **Atenção:** O número de iterações é importante pois a solução deve atingir a estabilidade (quando existe). No mínimo 1000 iterações.
- Determine a posição da 1º, 2º e 3º bifurcação e calcule a constante de **Constante de Feigenbaum** (com incerteza)

Tarefas 3 - Relatório

- Leiam os artigos:
  - Li and Yorke, *Period Three Implies Caos*, American Mathematical Monthly, v. 82, n. 10 (1975) 985-992
  - Robert M. May, *Biological Populations Obeying Difference Equations: Stble Points, Stable Cycles, and Chaos*, J. Theor. Biol., v. 51 (1975) 511-524
- Escolham um deles e façam um resumo curto de não mais de uma página.

- Os artigos estão na página da disciplina

Tarefas 4 - EXTRAS

- Você viu que o sistema tem 1 atrator diferente de 0 quando **$1<r<3$**. Demonstre porque os valores **Xn**:
  - convergem suavemente para a solução única, para **$1<r<2$**
  - oscilam em direção a solução única para **$2<r<3$**

- Você calculou a constante de Feigenbaum usando as intersecções 1º, 2º e 3º. Calcule também usando:
  - 2º, 3º e 4º
  - 3º, 4º e 5º
  - Etc...

- Faça um gráfico da constante encontrada versus intersecções usadas, mostrando que ela converge para o valor esperado.